经全国中小学教材审定委员会
2005年初审通过

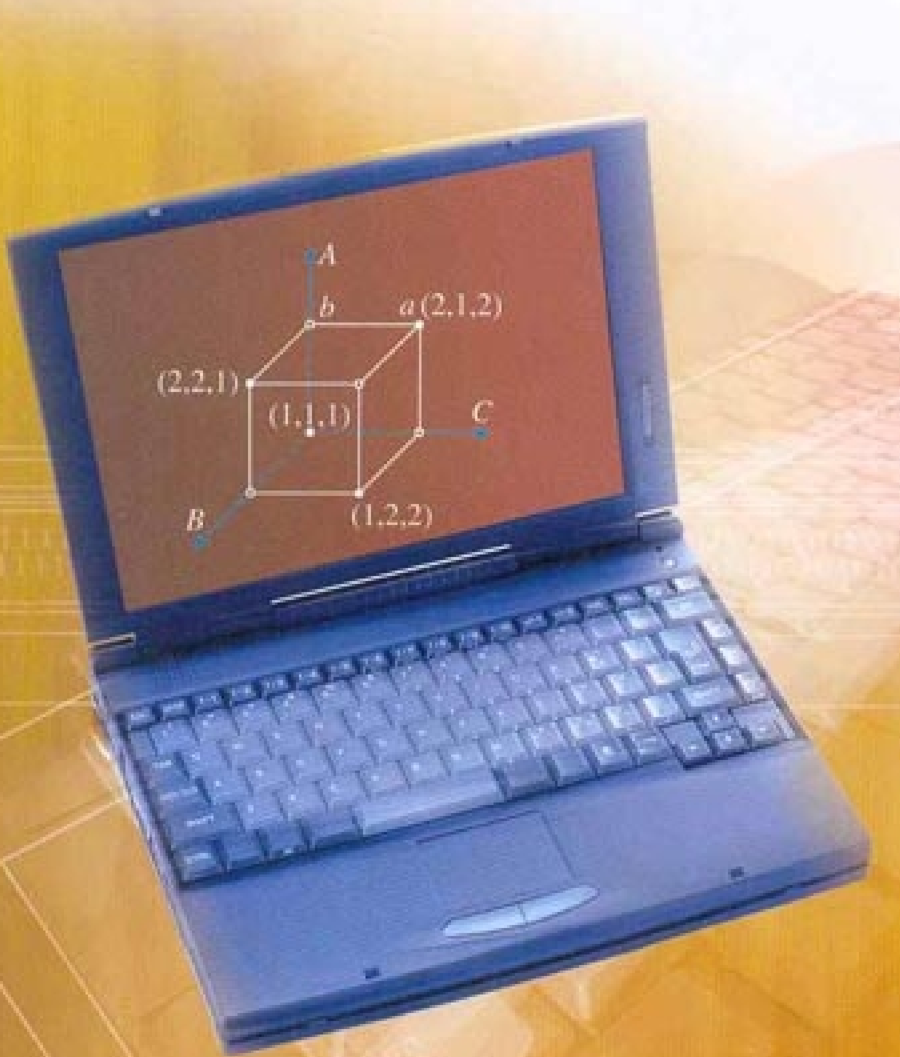
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–7

优选法与试验设计初步

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



人民教育出版社

A版

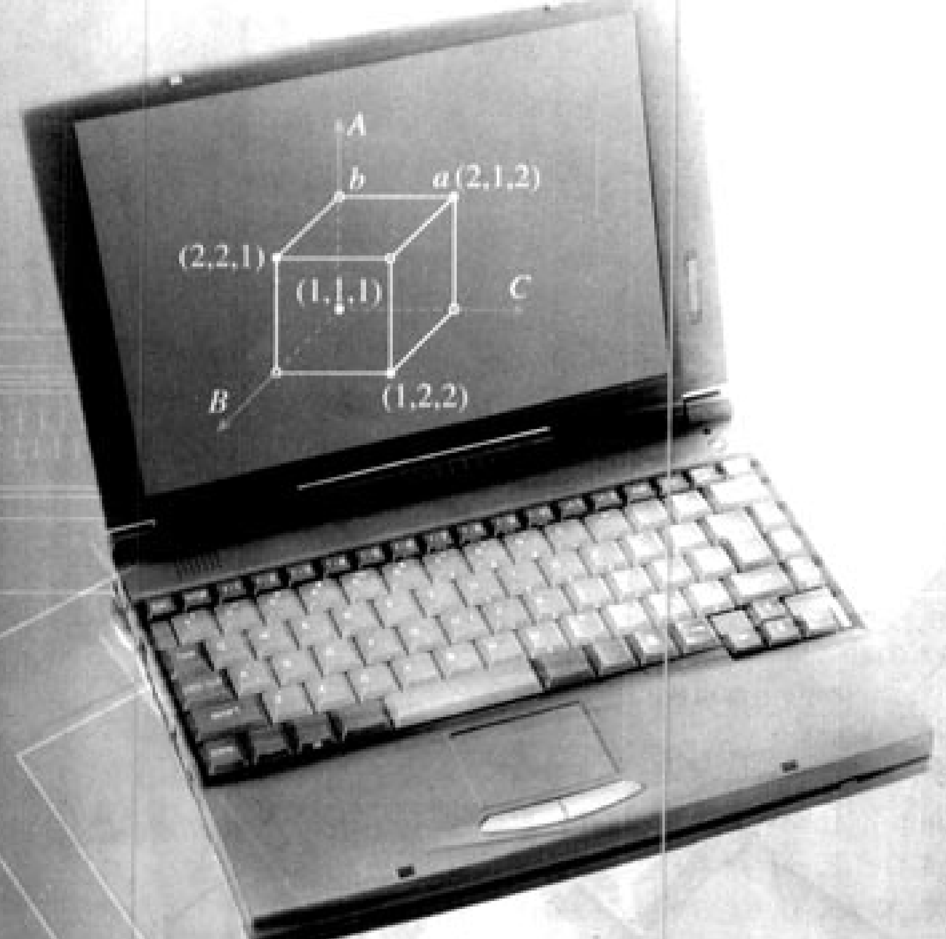
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–7

优选法与试验设计初步

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社

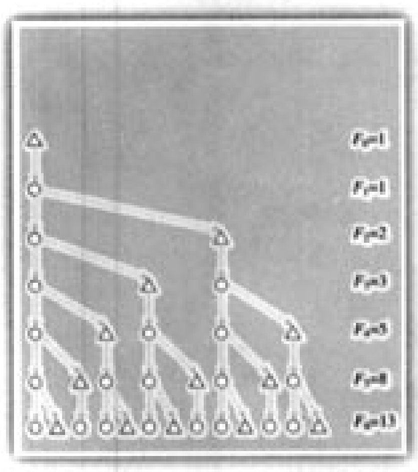
A版

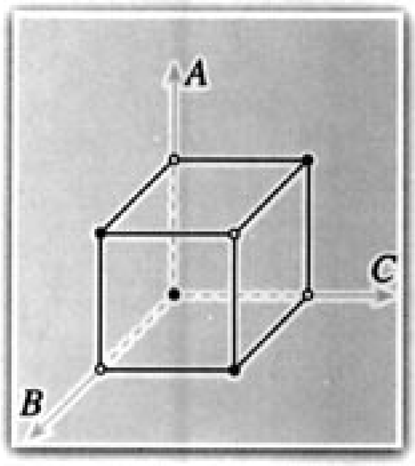
普通高中课程标准实验教科书
数 学
选修 4－7
优选法与试验设计初步（A 版）
人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著
*
人民教育出版社 出版发行
网址：http：//www.pep.com.cn
北京天宇星印刷厂印装 全国新华书店经销
*
开本：890 毫米×1 240 毫米 1/16 印张：3.75 字数：123 000
2007 年 1 月第 2 版 2008 年 6 月第 10 次印刷
ISBN 978－7－107－18682－0
G·11772（课） 定价：4.00 元

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

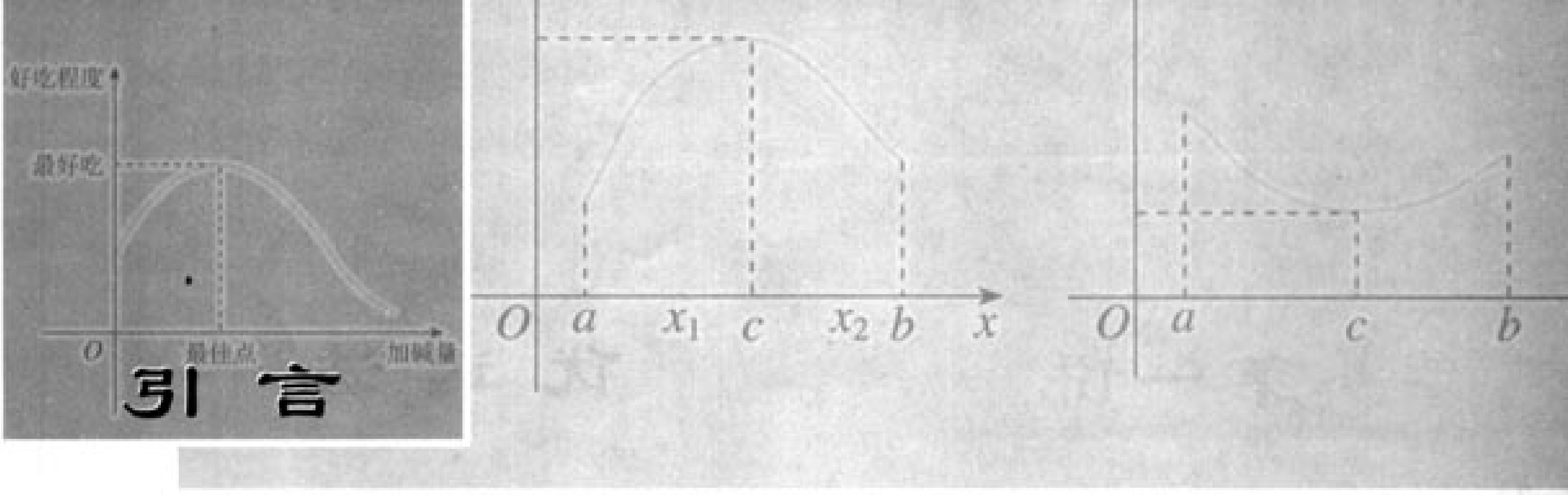
编　　者：张唯一　田载今
责任编辑：章建跃
美术编辑：王　艾
封面设计：吴　敬

目录




A
B
C

引言

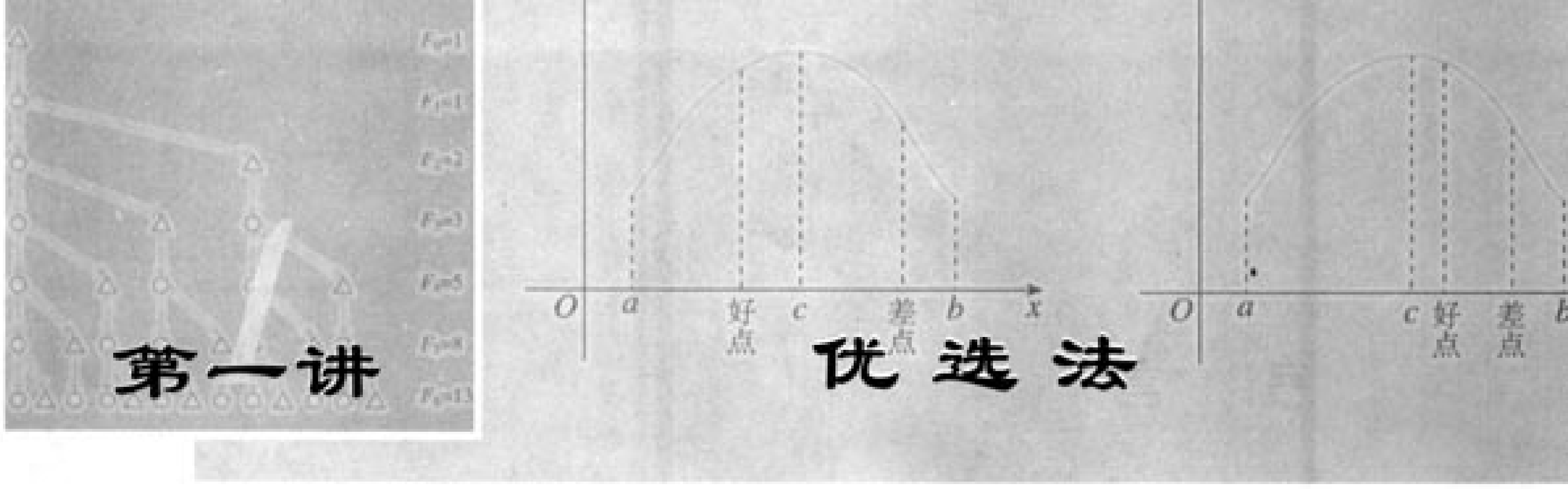


有一种商品价格竞猜游戏，参与者在只知道售价范围的前提下，对一件商品的价格进行竞猜．当竞猜者给出的估价不正确时，主持人以“高了”“低了”作为提示语，再让竞猜者继续估价，在规定时间或次数内猜对的，即可获得这件商品．如果参加类似的游戏，每次你将怎么给出估价呢？

蒸馒头是日常生活中常做的事情，为了使蒸出的馒头好吃，就要放碱．如果碱放少了，蒸出的馒头就发酸；碱放多了，馒头就会发黄且有碱味．对一定量的面粉来说，放多少碱最适合呢？如果你没有做馒头的经验，也没有人可以请教，如何迅速地找出合适的碱量？

一个农场希望知道某个玉米品种的高产栽培条件，假如可以掌握的因素是：种植密度、施化肥量、施化肥时间，如何迅速地找出高产栽培的条件？如何找出其中对玉米的产量影响比较大的因素呢？

事实上，现实中类似的问题举不胜举．你想过如何解决这些问题吗？通过本书的学习，你可以学到研究和解决这些问题的一些方法．



第一讲 优选法

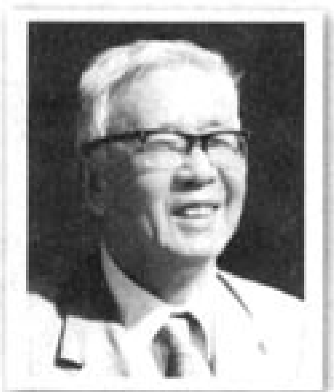
一、什么叫优选法

在生产、生活和科学试验中，人们为了达到优质、高产、低消耗等目的，需要对有关因素的最佳组合(简称最佳点)进行选择. 关于最佳点的选择问题，称为优选问题. 优选问题很常见，引言中提到的商品价格竞猜、蒸馒头放碱等都是优选问题. 又如生煤炉，为了节省时间，降低耗煤量，往往在不使用的时候，就把炉门关闭，但如果炉门关闭得太死，炉子就容易灭；关得太松(即留的缝隙太宽)则耗煤量就大. 炉门关到什么程度合适呢？这也是一个优选问题. 在生产和科学试验中，选取“合适”的配方，寻找“合适”的操作和工艺条件，给出产品的“合理”设计参数，把仪器调节器调到“合适”的程度等都是优选问题. 总之，优选问题在生产、科研和日常生活中大量存在.

对于那些试验结果和相关因素的关系不易用数学形式表达或数学表达太复杂的优选问题，人们往往通过做试验❶的办法来寻找各种因素的最佳点.

❶ 这里对试验应作广义的理解，即它可以是物理、化学、生物或生活生产中的实物试验，也可以是数学试验(例如在计算机上进行试验).

通过试验方法求最佳点时，如果不合理安排，我们可能面临大量的试验，不仅要花费大量人力、财力和时间，而且有时可能不具操作性. 例如，找一个1 km^2 池塘的最深点. 如果每隔 1 m 测量一次，则差不多要测量 1 000×1 000 次，即差不多 1 000 000 个点，虽然这里只有横竖两个因素，但测量点是一个不小的数目. 如果要测量的不是池塘而是海洋，或涉及的因素是 3 个、4 个，甚至 10 个，那么需要做的试验数目就更可观了. 可以说要做完这些试验几乎是不可能的.



华罗庚(1910. 11. 12— 1985. 6. 12)，江苏金坛人，世界著名数学家，中国科学院院士.

有没有用最少的试验次数就能找到最理想结果的方法呢？或者说怎样迅速找到最优方案？这就是优选法要解决的问题. 优选法是根据生产和科学研究中的不同问题，利用数学原理，合理安排试验，以最少的试验次数迅速找到最佳点的科学试验方法. 用优选法的目的在于减少试验的次数. 例如，上面的测池塘最深点问题，如果用优选法，那么有 130 次试验就可以达到上述效果.

优选法和其他科学一样，是在实践的基础上产生和发展起来的．20 世纪 60 年代，著名数学家华罗庚亲自组织推广了优选法，使优选法得到了广泛应用，取得了可喜成果．

习题1.1

1. 什么叫优选法？
2. 你能举一些自己生活中遇到过的优选问题吗？

二、单峰函数

在军事训练中，经常要考虑发射角度多大时炮弹的射程最远．这是一个优选问题．

如图 1-1，设炮弹的初速度为 $\boldsymbol{v}$，发射角度为 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，在时刻 t，炮弹距发射点的水平距离为 x，离地面的高度为 y．如果忽略空气阻力，则有

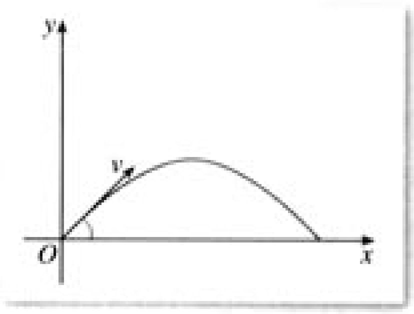


图 1-1

$$y=x\tan\theta-\frac{1}{2}\frac{g}{v^2\cos^2\theta}x^2,$$

其中 $v=|\boldsymbol{v}|$，g 为重力加速度．

令 $y=0$，得

$$x_1=0,\ x_2=\frac{v^2}{g}\sin 2\theta.$$

因此，炮弹的射程为 $\frac{v^2}{g}\sin 2\theta$．

从上述讨论可以发现，在一定的发射速度下，炮弹的射程是发射角的函数．当发射角 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$时，射程随发射角的增加而增加；当发射角为 $\frac{\pi}{4}$ 时，射程最大，因此 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 是发射角的最佳点；当发射角 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$时，射程随发射角的增加而减小(图 1-2)．

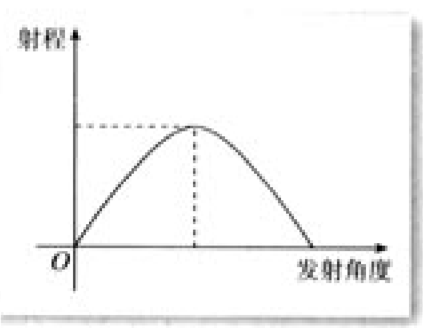


图 1-2

许多优选问题都有如上所述的情形．就是说，我们常常仅知道在试验范围内有一个最佳点，当试验范围内变化因素的取值比最佳点再大些或再小些时，试验效果都差，而且取值距离最佳点越远试验效果越差．通常称这样的试验具有单峰性．

如果函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上只有唯一的最大值点(或最小值点)C，而在最大值点

（或最小值点）C 的左侧，函数单调增加（减少）；在点 C 的右侧，函数单调减少（增加），则称这个函数为区间$[a, b]$上的单峰函数．例如，图 1-3 中的两个函数 $f(x)$，$g(x)$就是单峰函数．

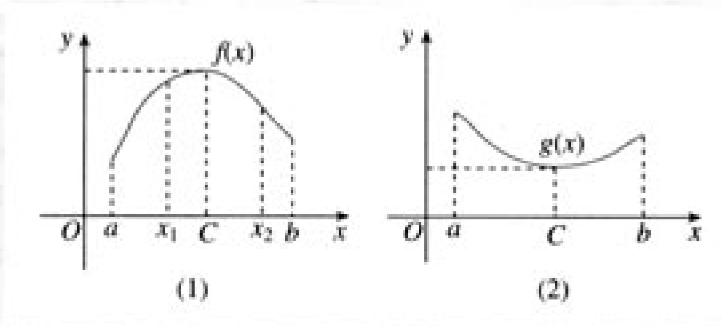


图 1-3

我们规定，区间$[a, b]$上的单调函数也是单峰函数．

由于对有最大值点和最小值点的处理方法类似，下面我们仅考虑有最大值点的单峰函数．

事实上，在炮弹发射试验中，除发射角外，初速度、空气阻力等也会影响炮弹的射程．我们把影响试验目标的初速度、发射角、空气阻力等称为因素．由于全面考虑试验中的各种因素往往非常困难，因此我们常常会假设其中的某些因素保持不变，或忽略某些影响较小的因素，而把关注点集中在感兴趣的某个因素上．例如，上述过程中，我们只考虑发射角这个因素，而认为初速度保持不变，并忽略了空气阻力．像这样，在一个试验过程中，只有（或主要有）一个因素在变化的问题，称为单因素问题．另外，我们把试验中可以人为调控的因素（例如发射角）叫做可控因素，而把那些不能人为调控的因素（例如空气阻力）叫做不可控因素．一般的，我们感兴趣的都是可控因素．

由上述过程可以看到，射程（目标）可以表示为发射角（因素）的函数．像这样表示目标与因素之间对应关系的函数，称为目标函数．我们常用 x 表示因素，$f(x)$表示目标函数（并不需要 $f(x)$的真正表达式）．假定包含最佳点的因素范围（试验范围）下限用 a 表示，上限用 b 表示，因素范围可以用 a 到 b 的线段来表示，并记作$[a, b]$．如果不考虑端点 a，b，就记成(a, b)．

当主要因素确定之后，接下来的任务是选择某种方法安排试验点（简称试点），通过试验找出最佳点，使试验的结果（目标）最好．

设 x_1 和 x_2是因素范围$[a, b]$内的任意两个试点，C 点为最佳点，并把两个试点中效果较好的点称为好点，效果较差的点称为差点．由图 1-4(1)、(2)可以直观地发现：若目标函数为单峰函数，那么好点比差点更接近最佳点，且最佳点与好点必在差点的同侧．于是，我们以差点为分界点，把因素范围分成两部分，并称好点所在部分为存优范围．

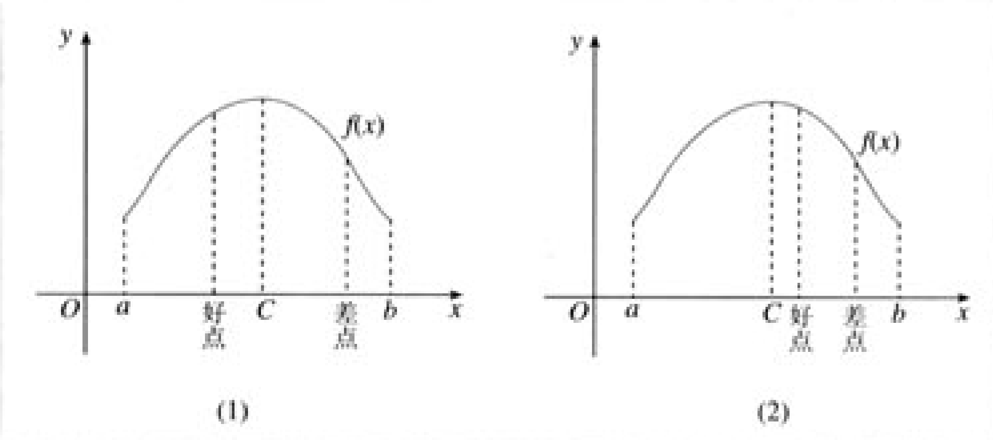


图 1-4

习题1.2

1. 判断下列函数在区间[−1，5]上哪些是单峰函数：

(1) $y=3x^2-5x+2$；

(2) $y=-x^2-3x+1$；

(3) $y=\cos x$；

(4) $y=e^x$；

(5) $y=x^3$.

2. 你在现实生活中遇到过哪些具有单峰性质的现象？举例说明.

三、黄金分割法——0.618 法

1. 黄金分割常数

探究

对于一般的单峰函数，如何安排试点才能迅速找到最佳点？

对于单峰函数，在同侧，离最佳点越近的点越是好点，且最佳点与好点必在差点的同侧. 由此，可按如下想法安排试点：先在因素范围$[a, b]$内任选两点各做一次试验，根据试验结果确定差点与好点，在差点处把$[a, b]$分成两段，截掉不含好点的一段，留下存优范围$[a_1, b_1]$，显然有$[a_1, b_1]\subseteq[a, b]$；再在$[a_1, b_1]$内任选两点各做一次试验，并与上次的好点比较，确定新的好点和新的差点，并在新的差点处把$[a_1, b_1]$分成两段，截掉不包含新好点的那段，留下新的存优范围$[a_2, b_2]$，同样有$[a_2, b_2]\subseteq[a_1, b_1]$……重复

上述步骤，可使存优范围逐步缩小.

在这种方法中，试点的选取是任意的，只要试点在前一次留下的范围内就行了. 这种任意性会给寻找最佳点的效率带来影响. 例如，假设因素区间为$[0, 1]$，取两个试点$\frac{2}{10}$、$\frac{1}{10}$，那么对峰值在$\left(0, \frac{1}{10}\right)$中的单峰函数，两次试验便去掉了长度为$\frac{4}{5}$的区间(图 1-5(1))；但对于峰值在$\left(\frac{2}{10}, 1\right)$的函数，只能去掉长度为$\frac{1}{10}$的区间(图 1-5(2))，试验效率就不理想了.

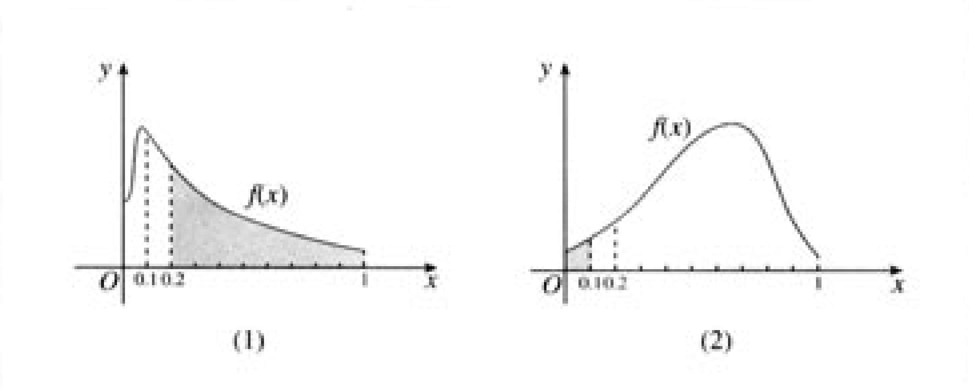


图 1-5

思考

怎样选取各个试点，可以最快地达到或接近最佳点?

我们希望能“最快”找到或接近最佳点的方法不只针对某个具体的单峰函数，而是对这类函数有普遍意义. 由于在试验之前无法预先知道哪一次试验效果好，哪一次差，即这两个试点有同样的可能性作为因素范围$[a, b]$的分界点，所以为了克服盲目性和侥幸心理，在安排试点时，最好使两个试点关于$[a, b]$的中心$\frac{a+b}{2}$对称. 同时，为了尽快找到最佳点，每次截去的区间不能太短，但是也不能很长. 因为为了一次截得足够长，就要使两个试点 x_1 和 x_2 与$\frac{a+b}{2}$足够近，这样，第一次可以截去$[a, b]$的将近一半. 但是按照对称原则，做第三次试验后就会发现，以后每次只能截去很小的一段，结果反而不利于很快接近最佳点.

为了使每次去掉的区间有一定的规律性，我们这样来考虑：每次舍去的区间占舍去前的区间的比例数相同.

下面进一步分析如何按上述两个原则确定合适的试点. 如图 1-6，设第 1 试点、第 2 试点分别为 x_1 和 x_2，$x_2<x_1$ 且 x_1，x_2 关于$[a, b]$的中心对称，即 $x_2-a=b-x_1$.

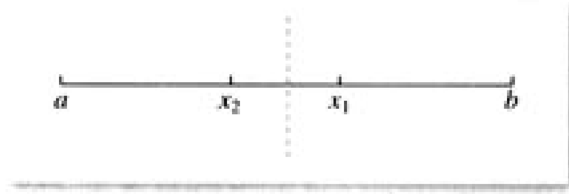


图 1-6

显然，不论点 x_2（或点 x_1）是好点还是差点，由对称性，舍去的区间长度都等于 $b-x_1$. 不妨设 x_2 是好点，x_1 是差点，于是舍去$(x_1, b]$. 再在存优范围$[a, x_1]$内安排第 3 次试验，设试点为 x_3，x_3 与 x_2 关于$[a, x_1]$的中心对称（如图 1-7 所示）.

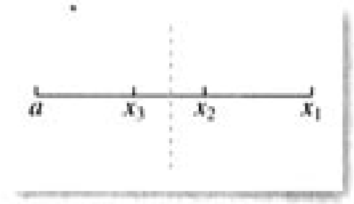


图 1-7

点 x_3 应在点 x_2 左侧. 因为如果点 x_3 在点 x_2 的右侧，那么当 x_3 是好点，x_2 是差点时，要舍去区间$[a, x_2]$，而它的长度与上次舍去的区间$(x_1, b]$的长度相同，违背成比例舍去的原则. 于是，不论点 x_3（或点 x_2）是好点还是差点，被舍去的区间长度都等于 x_1-x_2. 按成比例舍去的原则，我们有等式

$$\frac{b-x_1}{b-a}=\frac{x_1-x_2}{x_1-a}, \tag{1}$$

其中，左边是第一次舍去的比例数，右边是第二次舍去的比例数. 对式(1)变形，得

$$1-\frac{b-x_1}{b-a}=1-\frac{x_1-x_2}{x_1-a},$$

即

$$\frac{x_1-a}{b-a}=\frac{x_2-a}{x_1-a}. \tag{2}$$

式(2)两边分别是两次舍弃后的存优范围占舍弃前全区间的比例数. 设每次舍弃后的存优范围占舍弃前全区间的比例数为 t，即

$$\frac{x_1-a}{b-a}=t, \tag{3}$$

则由 $b-x_2=x_1-a$ 可得

$$\frac{x_2-a}{b-a}=1-t. \tag{4}$$

由式(2)得

$$\frac{x_1-a}{b-a}=\frac{\frac{x_2-a}{b-a}}{\frac{x_1-a}{b-a}}, \tag{5}$$

把(3)与(4)代入(5)，得

$$t=\frac{1-t}{t},$$

即

$$t^2+t-1=0.$$

解得 $t_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$t_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. 其中 t_1 为对本问题有意义的根，这就是黄金分割常数用 ω 表示.

试验方法中，利用黄金分割常数 ω 确定试点的方法叫做黄金分割法. 由于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$是无

理数，具体应用时，我们往往取其近似值 0.618，相应地，也把黄金分割法叫做 0.618 法.

2. 黄金分割法——0.618 法

把试点安排在黄金分割点来寻找最佳点的方法，即黄金分割法，是最常用的单因素单峰目标函数的优选法之一. 下面我们通过例子说明它的具体操作方法.

案例 炼钢时通过加入含有特定化学元素的材料，使炼出的钢满足一定的指标要求. 假设为了炼出某种特定用途的钢，每吨需要加入某元素的量在 1 000 g 到 2 000 g 之间，问如何通过试验的方法找到它的最优加入量？

最朴素的想法就是以 1 g 为间隔，从 1 001 开始一直到 1 999，把 1 000～2 000 g 间所有的可能性都做一遍试验，就一定能找到最优值. 这种方法称为均分法. 但这样要做1 000 次试验，在时间、人力和物力上都是一种浪费. 用 0.618 法，可以更快、更有效地找出最佳点. 具体操作方法如下：

用一张纸条表示 1 000～2 000 g，以 1 000 为起点标出刻度. 找出它的黄金分割点 x_1（在长度的 0.618 处）作为第 1 试点；再对折纸条，找出 x_1 的对称点 x_2 作为第 2 试点(图 1-8).

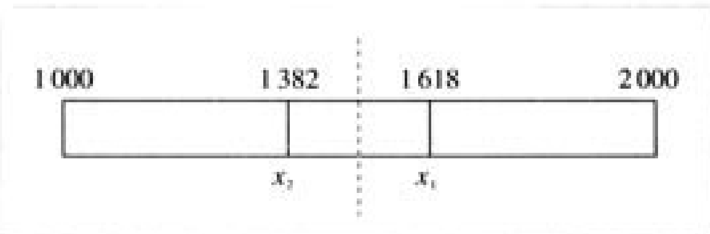


图 1-8

这两点的材料加入量是

$$x_1=1\ 000+0.618\times(2\ 000-1\ 000)=1\ 618(\text{g}),$$

$$x_2=1\ 000+2\ 000-x_1=1\ 382(\text{g}).$$

如果称因素范围的两端分别为小头和大头，那么上述两式可表示为

$$x_1=\text{小}+0.618\times(\text{大}-\text{小})；\tag{1}$$

$$x_2=\text{小}+\text{大}-x_1.\tag{2}$$

对于式(2)，相当于是“加两头，减中间”. 类似的，在确定第 n 个试点 x_n 时，如果存优范围内相应的好点是 x_m，那么有

$$x_n=\text{小}+\text{大}-x_m.\tag{*}$$

比较两次试验结果，如果第 2 试点比第 1 试点好，则沿 1 618 处将纸条剪断，去掉1 618以上部分，保留 1 618以下部分. 将保留的纸条对折，找出第 2 试点 x_2 的对称点 x_3 作为第 3 试点(图 1-9). 按公式(*)，有

$$x_3=1\ 000+1\ 618-1\ 382=1\ 236,$$

即第 3 次的材料加入量是 1 236 g.

? 如果这两次试验结果一样，则应具体分析，看最佳点可能在哪一边，再决定取舍. 在一般情况下，可以同时划去因素范围[1 000, 1 382]和[1 618, 2 000]，仅保留中间因素范围[1 382, 1 618]. 那么这样做会不会划去最佳点呢？

如果第 2 试点仍是好点，则剪掉 1 236 以下部分，在留下部分内寻找 x_2 的对称点 x_4 作为第 4 试点(图 1-10)，按照公式(*)可得第 4 试点的材料加入量为 1 472.

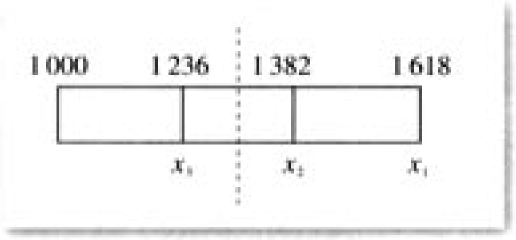


图 1-9

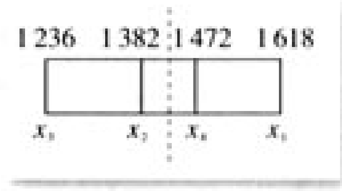


图 1-10

如果这点比第 2 点好，则剪掉 1 382 以下部分，在留下的部分内按同样的方法继续下去，就能迅速逼近该元素的最佳加入量.

对于一般的因素范围$[a, b]$，用 0.618 法确定试点的操作过程与上述过程完全一致.

从上述过程可以看到，用 0.618 法寻找最佳点时，虽然不能保证在有限次内准确找出最佳点，但随着试验次数的增加，最佳点被限定在越来越小的范围内，即存优范围会越来越小. 我们用存优范围与原始范围的比值来衡量一种试验方法的效率，这个比值叫做精度，即 n 次试验后的精度为

$$\delta_n=\frac{n\text{次试验后的存优范围}}{\text{原始的因素范围}}.$$

显然，在相同试验次数下，精度越高，方法越好.

用 0.618 法确定试点时，从第 2 次试验开始，每一次试验都把存优范围缩小为原来的 0.618. 因此，n 次试验后的精度为

$$\delta_n=0.618^{n-1}.$$

探究

用 0.618 法寻找最佳点时，达到精度 0.05 的要求需要多少次试验？精度 0.01 呢？精度 δ 呢？

设达到精度 0.05 的要求需要 n 次试验，那么

$$0.618^{n-1}\leqslant 0.05,$$

即

$$n\geqslant\frac{\lg 0.05}{\lg 0.618}+1\approx 7.22.$$

于是，只要安排 8 次试验，就能保证精度达到 0.05. 同理可得，安排 11 次试验，就能保证精度达到 0.01.

一般地，给定精度 δ，为了达到这个精度，所要做的试验次数 n 满足

$$0.618^{n-1}\leqslant\delta<1,$$

即

$$(n-1)\lg 0.618\leqslant \lg \delta<0,$$

所以

$$n\geqslant \frac{\lg \delta}{\lg 0.618}+1.$$

黄金分割法适用目标函数为单峰的情形，第 1 个试验点确定在因素范围的 0.618 处，后续试点可以用“加两头，减中间”的方法来确定.

习题1.3

1. 二氧化锰可作为在较高温度下分解的氯酸钾的催化剂，氯酸钾分解产生氧气的速率快慢跟所加二氧化锰量有关. 一般二氧化锰与氯酸钾的质量比取 1∶10 至 1∶1. 现要在相同的温度和其他条件下，找出二氧化锰与氯酸钾比例使产生氧气速率最快，该如何安排试验，你能亲自做实验找出最优比例吗？
2. 把神舟 5 号送入太空的长征 2 号 $F(CZ-2F)$ 运载火箭是捆绑式两级大型液体运载火箭. 火箭分级是为了第一级推进剂燃烧完以后可以扔掉，这样可以减少飞行重量，提高火箭性能. 为了找出两级合理的分点，要进行大量复杂的计算. 通过模拟试验可以避免大量的计算，为了找出最优的两级比例，你能给出试点的安排方法吗？
3. 举出现实生活或学习过程中可应用 0.618 法寻找最佳点的例子.

阅读与思考

黄金分割研究简史

公元前 3 世纪，古希腊数学家欧多克索斯(Eudoxus，约公元前 400—前 347)在深入研究比例理论时，提出了分线段的“中末比”问题：将一线段 AB 分为两线段 AM，MB，使得其中较长的一段 AM 是全长 AB 与另一段 MB 的比例中项(图 1)，即

$$AB:AM=AM:MB.$$

为简单起见，令 $AB=1$，$AM=\omega$，则有

$$1:\omega=\omega:(1-\omega),$$

图 1

即

$$\omega^2+\omega-1=0. \tag{1}$$

解方程，得

$$\omega=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

根据问题的实际意义，取 $\omega=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\ 033\ 988\ 749\ 89\cdots$，这就是黄金分割常数.

中世纪以后，“中末比”被披上神秘的外衣，意大利数学家帕乔利(Luca Pacioli，约1445—1417)称之为“神圣比例”. 17世纪欧洲著名的天文学家开普勒称之为神圣分割，并说“勾股定理和中末比是几何中的双宝，前者好比黄金，后者堪称珠宝”. 他用黄金来形容勾股定理而不是中末比. 黄金分割的名称是很晚才出现的. 最早正式使用“黄金分割”这个名词的是欧姆(Martin Ohm，1792—1892)，他是以发现电学上欧姆定律著称的G. S. 欧姆的弟弟. 19世纪以后，黄金分割之名逐渐通行起来.

对黄金分割的研究最早见于公元前500多年的毕达哥拉斯学派. 大约在公元前530年，古希腊著名数学家毕达哥拉斯在意大利南部的克洛吞(Crotona)建立了讨论宗教、科学和哲学问题的毕达哥拉斯学派. 该学派在分析正五边形性质时发现了黄金分割作图法：五边形对角线的交点恰好是对角线上的黄金分割点(如图2所示，正五边形的对角线恰好构成了一个正五角星). 如果用 d 表示对角线长，s 表示边长，可以推出公式 $d(d-s)=s^2$，这是表示黄金分割关系的公式，类似于式(1).

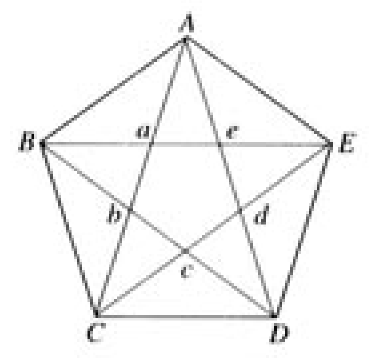


图2

关于黄金分割有种种传说. 例如古希腊和欧洲的建筑师应用黄金分割使建筑优美协调；古希腊的智慧女神雅典娜和太阳神阿波罗塑像用黄金分割比设计身段而显得很美；以黄金分割所得的两线段作边的矩形，比其他矩形美观；等等.

对黄金分割这一古老的数学问题，过去人们只是从趣味或艺术上研究它. 黄金分割的实际应用，最著名的例子就是优选学中的黄金分割法或0.618法.

四、分数法

1. 分数法

案例1　在配置某种清洗液时，需要加入某种材料. 经验表明，加入量大于130 ml肯定不好. 用150 ml的锥形量杯计量加入量，该量杯的量程分为15格，每格代表10 ml. 用试验法找出这种材料的最优加入量.

思考

这个问题能否用0.618法？如果不能，该如何安排试验？

如果用 0.618 法，那么算出的试点不是 10 ml 的整数倍. 由于量杯是锥形的，每格为 10 ml，所以用它去量一个不是 10 ml 的整数倍的材料量，很难做到精确. 因此，这个问题用 0.618 法不方便.

我们知道，0.618 是黄金分割常数 $\omega=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$的近似数. 是否可以用其他形式的数作为 ω 的近似数来解决上面的问题呢？

由于 $\omega=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$是方程 $\omega^2+\omega-1=0$ 的根，因此 $\omega(\omega+1)=1$，即

$$\omega=\frac{1}{1+\omega}.$$

将上式右边的 ω 用$\dfrac{1}{1+\omega}$代替，得

$$\omega=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\omega}}.$$

继续上面的步骤，可得

$$\omega=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}. \tag{1}$$

式(1)右边是一个繁分式，我们称它为连分数❶，准确地说是无穷连分数. 为了书写简便，(1) 式可以写成

$$\omega=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots. \tag{2}$$

❶ 连分数的知识见附录一.

式(2)表示 ω 可以看作无穷多项的和. 下面计算这个无穷分数的前几项：

$$\frac{1}{1}=1,$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=\frac{3}{5},$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=\frac{5}{8},$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=\frac{8}{13},$$

$$\cdots$$

可以发现，由上面的结果可以组成一个各项为分数的数列

$$\frac{1}{2}，\frac{2}{3}，\frac{3}{5}，\frac{5}{8}，\frac{8}{13}，\cdots，\frac{F_n}{F_{n+1}}，\cdots. \tag{3}$$

数列（3）的项$\frac{F_n}{F_{n+1}}$中，分子和分母分别是数列$\{F_n\}$中的相邻两项. 数列$\{F_n\}$为

$$1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，\cdots.$$

它的前两项为$F_0=1$和$F_1=1$，从第三项起每一项是其相邻的前两项的和，即

$$F_0=1，F_1=1，F_2=F_1+F_0，F_3=F_2+F_1，\cdots，F_n=F_{n-1}+F_{n-2}，\cdots.$$

数列$\{F_n\}$叫做斐波那契数列，后面的“阅读与思考”中有关于它的介绍.

可以证明，随着n的增大，数列（3）的项$\frac{F_n}{F_{n+1}}$越来越趋向于ω. 这样，分数$\frac{F_n}{F_{n+1}}$可以作为ω的近似值，而且n越大近似程度越高. 我们称数列（3）为ω的渐近分数列，$\frac{F_n}{F_{n+1}}$为ω的第n项渐近分数.

既然数列（3）是ω的渐近分数列，那么解决案例1能否选数列（3）中的项代替ω来确定试点呢？

案例1中，加入量大于130 ml时肯定不好，因此试验范围就定为0～130 ml. 我们看到，10 ml，20 ml，30 ml，…，120 ml把试验范围分为13格，对照ω的渐进分数列，如果用$\frac{8}{13}=\frac{F_5}{F_6}$来代替0.618，那么我们有

$$x_1=0+\frac{8}{13}\times(130-0)=80，$$

这样，第1个试点安排在80 ml处，其对称点用“加两头，减中间”的方法，得

$$x_2=0+130-80=50，$$

即第2个试点安排在50 ml处，在整个因素范围的$\frac{5}{13}=\frac{F_4}{F_6}$位置(图1-11).

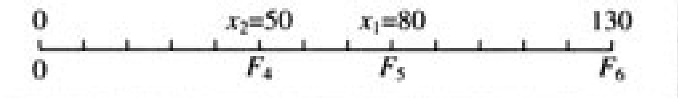


图1-11

比较两次试验结果，如果x_1是好点，则去掉x_2以下部分，存优范围为50～130 ml，其中有8格(7个试点，包括一个已作过试验的80 ml处).

在存优范围50～130 ml内，用“加两头，减中间”的方法求x_1的对称点，得

$$x_3=50+130-80=100，$$

所以第3试点在100 ml处. 这个点相当于对存优范围重新进行编号后的$\frac{F_4}{F_5}$位置，而x_1在存优范围的$\frac{F_3}{F_5}$位置(图1-12).

图1-12

继续用“加两头，减中间”的方法确定试点，几次试验后，就能找到满意的结果.

优选法中，像上面这样用渐进分数近似代替 ω 确定试点的方法叫分数法.

如果因素范围由一些不连续的、间隔不等的点组成，试点只能取某些特定数，这时只能采用分数法.

案例 2 在调试某设备的线路中，要选一个电阻，但调试者手里只有阻值为0.5 KΩ，1 KΩ，1.3 KΩ，2 KΩ，3 KΩ，5 KΩ，5.5 KΩ 等七种阻值不等的定值电阻. 他应当如何优选这个阻值?

如果用 0.618 法，则计算出来的电阻调试者手里可能没有. 这时，可以先把这些电阻由小到大顺序排列：

阻值(KΩ)	0.5	1	1.3	2	3	5	5.5
排列	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)

这样，就把阻值优选变为排列序号的优选，问题就容易解决了.

为了便于用分数法，可在两端增加虚点(0)，(8)，使因素范围凑成为 8 格，用$\frac{5}{8}$来代替 0.618. 第 1 个试点取序号(5)，即取 3 KΩ；第 2 个试点按“加两头，减中间”的方法得(0)+(8)−(5)=(3)，即取 1.3 KΩ. 以下按分数法顺次确定试点，就可以较快地找到较好的点.

现实中，由于时间、人力、物力和财力的关系，往往使试验次数受到限制，这种情况下，采用分数法可以达到较好的效果. 例如，设因素范围是[0，1]，如果只能做 1 次试验，用$\frac{1}{2}$代替 0.618，选$\frac{1}{2}$为试点，可以达到 0.5 的精度，即这一点与最佳点的距离最多为$\frac{1}{2}$；如果只能做 2 次试验，则用$\frac{2}{3}$代替 0.618，第 1 试点选在$\frac{2}{3}$处，第 2 试点选在$\frac{1}{3}$处，其精确度为$\frac{1}{3}$；如果能做 3 次试验，则用$\frac{3}{5}$代替 0.618，其精度为$\frac{1}{5}$……做 k 次试验就用$\frac{F_k}{F_{k+1}}$代替 0.618，其精度为$\frac{1}{F_{k+1}}$.

一般地，用分数法安排试点时，可以分两种情况考虑.

(1) 可能的试点总数正好是某一个(F_n-1).

这时，前两个试点放在因素范围的$\frac{F_{n-1}}{F_n}$和$\frac{F_{n-2}}{F_n}$位置上，即先在第 F_{n-1}和 F_{n-2}点上做试验(图 1-13).

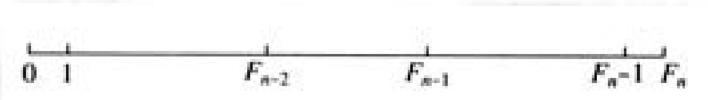


图 1-13

比较两个试验结果，如果 F_{n-1}是好点，则划去 F_{n-2}点以下的因素范围；如果 F_{n-2}是好点，则划去 F_{n-1}点以上的因素范围. 经过两次试验，存优范围中还剩下$(F_{n-1}-1)$个试

点．重新编号后，第 F_{n-2} 和 F_{n-3} 个分点，其中有一个是刚才留下的好点，另一个是下一步的试点．比较 F_{n-2}，F_{n-3} 的试验结果，和前面的做法一样，从坏点把因素范围切开，去掉短的一段．这时，新的存优范围就只有 $(F_{n-2}-1)$ 个试点了．重复上述步骤，直到因素范围内没有应该试验的点为止．

在 (F_n-1) 个可能的试点中，用分数法安排试验，最多只需作 $(n-1)$ 次试验就能找到其中的最佳点（当然，如果在试验中遇到一个满足要求的好点，则可停止后续试验）．这样，如果最多只能作 k 次试验，那么就可以把试验范围等分成 F_{k+1} 份，在 $(F_{k+1}-1)$ 个分点安排试验，这样可以使 k 个试验的结果达到最高精度．

(2) 所有可能的试点总数大于某一 (F_n-1)，而小于 $(F_{n+1}-1)$．这时可以用如下方法解决．

先分析能否减少试点数，把所有可能的试点减少为 (F_n-1) 个，从而转化为前一种情形．如果不能减少，则采取在试点范围之外，虚设几个试点，凑成 $(F_{n+1}-1)$ 个试点，从而转化成(1)的情形．对于这些虚设点，并不真正做试验，而是直接把它们作为坏点．很明显，这种虚设点，并不增加实际试验次数．

分数法也是适合单因素单峰函数的方法，它与 0.618 法的本质是相同的，两者的区别只是用分数 $\frac{F_{n-1}}{F_n}$ 和 $\frac{F_{n-2}}{F_n}$ 代替 0.618 和 0.382 来确定试点，后续的步骤都是相同的．分数法中，一旦用 $\frac{F_{n-1}}{F_n}$ 确定了第一个试点，后续试点可以用“加两头，减中间”的方法来确定．

阅读与思考

斐波那契数列和黄金分割

假定一对（一雌一雄）兔子出生两个月后就有繁殖能力，一对兔子每个月能生出一对小兔子，而且所有兔子都能成活，那么一年后总共有多少对兔子？

第1个月和第2月小兔子没有繁殖能力，所以兔子数都是一对；第三个月，生下一对小兔，于是兔子数变为2对；第4个月，大兔子又生一对，小兔子还没有繁殖能力，所以兔子数为3对；以后每个月的兔子数依次类推．用 F_n 表示第 $n+1$ 个月兔子的总对数，图1表示兔子的繁殖规律，图中△表示一对小兔子，○表示一对大兔子，实箭头表示一对小兔子长大成为一对大兔子或表示一对大兔子照样生长，虚箭头表示一对大

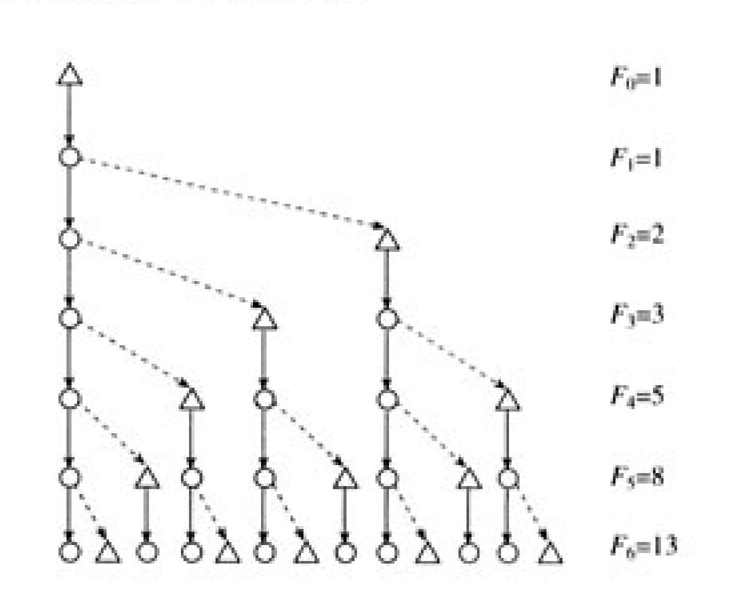


图1

兔子生出一对小兔子.

将上图整理成表格，则有：

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	一年后
对数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

仔细观察每个月的兔子数构成的数列

$$1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，\cdots，$$

可以发现，从第 3 项开始，每一项都是相邻的前两项之和，即：

$$1+1=2，$$
$$1+2=3，$$
$$2+3=5，$$
$$\cdots\cdots$$

这个数列是意大利数学家斐波那契首先给出的．为了纪念他，此数列被称为斐波那契数列❶.

❶ 斐波那契数列的通项公式是 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，公式表明，虽然 F_n 是整数，但它却是由一些无理数表示的.

用 F_0，F_1，F_2，F_3，… 依次表示上述数列中的各项，它们满足递推关系：

$$F_2=F_1+F_0，$$
$$F_3=F_2+F_1，$$
$$\cdots\cdots$$

一般地，

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n\geqslant 2).$$

显然，当 F_0、F_1 确定后，斐波那契数列也就确定了.

斐波那契数列有着广泛的应用，其中之一是由它可以构造出黄金分割常数 ω 的近似分数列.

2. 分数法的最优性

由前面可知，当有$(F_{n+1}-1)$个试点时，用分数法安排试验，最多只需要作 n 次试验就能找出其中的最佳点．现在，反过来考虑问题，无论用什么方法安排试验，作 n 次试验最多能从多少个试点中找出最佳点.

以下假设目标函数为单峰的.

当有 2 个试点时，在每个试点各作一次试验，通过比较就能找出其中的最佳点.

当有 3 个试点时，只在其中两个试点各作一次试验，不能确定全部试点中的最佳点.

因此，作两次试验最多能从 2 个试点中保证找出最佳点.

注意到当 $n=2$ 时，$F_{n+1}-1=F_3-1=2$，事实上，我们可以将上面作 2 次试验的情形，推广到一般情形：作 n 次试验，最多能从$(F_{n+1}-1)$个试点中保证找出最佳点.

这样，我们有以下结论：

在目标函数为单峰的情形，通过 n 次试验，最多能从$(F_{n+1}-1)$个试点中保证找出最

佳点，并且这个最佳点就是 n 次试验中的最优试验点. ❶

我们知道，用分数法安排试验，对于$(F_{n+1}-1)$个试点 x_1，x_2，x_3，…，$x_{(F_{n+1}-1)}$，最先安排的试点是 x_{F_n} 和 $x_{F_{n-1}}$，然后通过 n 次试验保证找出最佳点. 如果不用分数法安排试验，就不能保证通过 n 次试验找出$(F_{n+1}-1)$个试点中的最佳点. 事实上，有以下结论：

在目标函数为单峰的情形，只有按照分数法安排试验，才能通过 n 次试验保证从$(F_{n+1}-1)$个试点中找出最佳点.

❶ 这个结论的证明要用数学归纳法，我们把它作为附录二（一）列于书后供大家参考.

上面结论的证明思路是：对于$(F_{n+1}-1)$个试点 x_1，x_2，x_3，…，$x_{(F_{n+1}-1)}$，证明最初两个试验要安排在点 x_{F_n} 和 $x_{F_{n-1}}$ 上（这与分数法是相同的），否则不能在 n 次试验后保证找出最佳点；后续的试验选点也如分数法一样逐一选取. 因此，只有分数法能够通过 n 次试验保证找出上面点中的最佳点. 具体证明过程较复杂，见附录二（二）.

对于一个优选法问题，设有 m（m 为正整数）个试点，当试点个数 m 等于某个$(F_{n+1}-1)$（n 为某个正整数）形式的数时，上面的结论说明用分数法所用试验次数最少；当试点个数 m 不是某个$(F_{n+1}-1)$（n 为某个正整数）形式的数时，我们可以假设有 $F_n-1<m<F_{n+1}-1$，则可以先将试点个数调整为某个适当的$(F_{n+1}-1)$（n 为某个正整数）形式的数，然后使用分数法找出最佳点，所用试验次数最多为 n. 如果不用分数法，用其他方法安排试验，所用试验次数不会少于 n，这是因为对(F_n-1)个试点只有分数法才能用$(n-1)$次试验保证找出最佳点，其他方法所作试验次数至少比$(n-1)$大，即至少为 n 次，而现在 $m>F_n-1$，所以从 m 个点中找出最佳点至少要作 n 次试验.

综上所述，对于试点个数为某常数时，用分数法找出其中最佳点的试验次数最少，这就是分数法的最优性. 分数法在有有限个试点的优选问题中被广泛使用.

习题1.4

1. 说明分数法适用的范围.
2. 卡那霉素发酵液生物测定，一般都规定培养温度为(37 ± 1)℃，培养时间在 16 小时以上. 某制药厂为了缩短时间，决定优选培养温度，试验范围定为 29～50℃，精确度要求±1℃. 能用分数法安排试验吗？如何安排？
3. 现有 10 层梯田需要灌溉，需要从山脚用水泵往上抽水，抽到某一层的水可以灌溉这层和其以下的所有层. 如现有两台水泵，可以安置在 10 层梯田中的任一层，安置后不能移动. 如何安置这两台水泵，才能使所有的梯田被灌溉而做功最少？你能用合适的优选法迅速找其中的最佳点吗？
4. 你能举出实际中可用分数法进行优选的例子吗？

五、其他几种常用的优选法

1. 对分法

案例 1 有一条 10 km 长的输电线路出现了故障，在线路的一端 A 处有电，在另一端 B 处没有电，要迅速查出故障所在位置.

0.618 法和分数法都是先做两个试验，然后再通过比较，确定出存优范围，不断地将试验范围缩小，最后找到最佳点. 现在找输电线路故障所在位置，我们只需在 AB 之间的任意点 C 做检查，就能根据点 C 是否有电，判断出故障在哪一段，从而缩小故障范围，而不需要做两个试验进行比较. 那么，如何选取每次的检查点才能迅速找出故障位置呢？

由于在检查之前无法预知检查结果，因此也就无法知道要排除的是检查点左边还是右边的线路. 为了克服盲目性，我们把每次检查点安排在线路的中间，这样每次就可以去掉一半的长度. 第一个检查点 C 安排在线路中间，如果有电，说明故障不在 AC 而在 CB 段，接着在 CB 中点 D 检查，如果没有电，说明故障在 CD 部分，再在 CD 中点 E 处检查，如此类推，很快就能找出故障的位置(图 1-14).

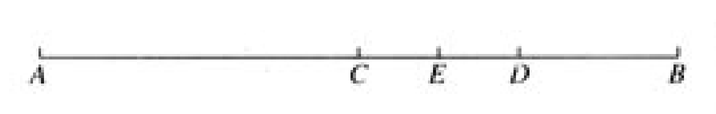


图 1-14

对分法最简单，在实践中应用非常普遍.

这个方法的要点是每个试点都取在因素范围的中点，将因素范围对分为两半，所以这种方法就称为**对分法**. 用这种方法做试验的效果较 0.618 法好，每次可以去掉一半.

那么是不是所有的问题都可以用对分法呢？不是的. 如果每作一次试验，根据结果，可以决定下次试验的方向，就可以用对分法. 例如案例 1 中，根据有没有电就可以判断是哪段线路有故障，下次就在有故障的一段检查. 决定下次试验方向，只要满足以下两个条件就可以：一是要有一个标准，对分法每次只有一个试验结果，如果没有一个标准，就无法鉴别试验结果的好坏，案例 1 中的标准是有没有电；二是要预知该因素对指标的影响规律，也就是说，能够从一个试验的结果直接分析出该因素的值是取大了还是取小了，案例 1 中，根据检查点是否有电，知道下一个应该离 A 点更近些还是更远些. 如果没有这一条件就不能确定下一次应该在哪个因素范围进行试验.

一般地，对分法可以按照如下步骤操作：

首先根据经验确定因素范围，设因素范围为 $[a, b]$. 第一次试验在 $[a, b]$ 的中点 $x_1\left(x_1=\dfrac{a+b}{2}\right)$ 处做. 然后根据试验结果判断下次试验的方向，如果试验结果表明 x_1 取小了，那么存优范围是 $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$，就把此次试点(中点)以下的因素范围 $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right)$ 截去；如果试验结果表明 x_1 取大了，那么存优范围是 $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$，就把此次试点(中点)以上的因素

范围$\left(\frac{a+b}{2}, b\right]$截去．这样，每试验一次，存优范围就缩小一半．重复上面的操作，即在存优范围的中点做试验，根据试验结果截去范围的一半，直到找出一个满意的试点，或存优范围已变得足够小，再试下去结果无显著变化为止．

案例 2 在商品价格竞猜游戏中，每一次试猜时，如何给出商品估价就可以最迅速地猜出真实价格？

因为每次给出估价都会得到“高了”或“低了”的提示语，于是，我们可以根据提示语确定下一次该往高还是往低估．这说明可以用对分法给出商品估价，每次给出的估价都是存优区间的中点．每给一次估价，可以使价格范围缩小$\frac{1}{2}$，迅速猜中商品价格．

可以发现对分法和 0.618 法及分数法，在确定下一个试点时，比较的对象是不同的．后两种方法是两个试点上的试验结果的比较，而对分法是一个试点上的试验结果与已知标准（或要求）的比较．所以在满足目标函数为单峰的假设下，使用对分法还需要满足具有已知标准这个条件．从效果上看，对分法比 0.618 法及分数法好，每一次试验可以去掉一半的因素范围．相对于 0.618 法及分数法，对分法更简单，易操作．

思考

分别用 0.618 法和对分法安排试验，找出蒸馒头时合适的放碱量，哪种方法会更有效呢？为什么？

2. 盲人爬山法

前面介绍的 0.618 法、分数法及对分法都是很有效的优选法，可以大幅度减少试验次数．但在实际的生产实践和科学试验中，某些因素不允许大幅度调整．例如，设备正在运行中，如果坏一次损失会很大；某些成分含量的多少对结果影响很大，甚至由于该成分的过量破坏了试验装置的清洁度，而影响下一次试验结果的正确性．这些试验用 0.618 法、分数法或对分法就不很合适．这种限制要求我们在原有生产条件的基础上逐步探索，逐步提高，就像盲人爬山一样，在立足处，对前后两个方向进行试探，如果前面高了就向前走一步，否则试探后面，如果前后都比某点低，就说明到达山顶了．

具体可以按如下方法操作：

先找一个起点 A(这个起点可以根据经验或估计)，在 A 点做试验后可以向该因素的减少方向找一点 B'做试验．如果好，就继续减少；如果不好，就往增加方向找一点 C 做试验．如果 C 点好就继续增加，这样一步一步地提高．如果增加到 E 点，再增加到 F 点时反而坏了，这时可以从 E 点减少增加的步长，如果还是没有 E 点好，则 E 就是该因素的最佳点(图 1-15)．这就是单因素问题的**盲人爬山法**．

爬山法的效果快慢与起点关系很大，起点选得好可以省好多次试验．所以对爬山法来

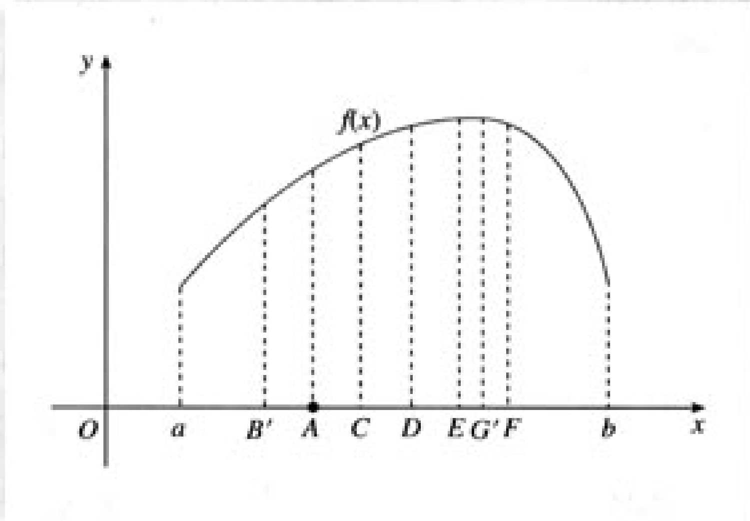


图 1-15

说，试验范围的正确与否很重要. 另外，每步间隔的大小，对试验效果关系也很大. 在实践中往往采取“两头小、中间大”的办法，也就是说，先在各个方向上用小步试探一下，找出有利于寻找目标的方向，当方向确定后，再根据具体情况跨大步，快接近最佳点时再改为小步. 如果由于估计不正确，大步跨过最佳点，这时可退回一步，在这一步内改用小步进行. 一般说来，越接近最佳点的时候，效果随因素的变化越缓慢.

这个方法还可以应用在某些可变因素要调到某点，必须经过由小到大或由大到小的连续过程的问题上. 像改变气体和液体的流速、温度；仪器调试中的可变电容、可变电阻；等等，采用爬山法比较合适. 试验中，可以边调整边检查，调到最佳点时就固定下来. 一般在大生产中爬山法较常用.

3. 分批试验法

案例 3 电机修理厂根据原工艺要求，单晶切片厚度为 0.54 mm 左右，经研磨损失 0.15 mm 左右，1 kg 单晶只出 12 000 左右小片. 为了节约原材料、提高工效、降低成本，对减小单晶片厚度，在(0.20，0.40)范围内做优选法试验. 切割不同厚度的单晶片很方便，但要检验究竟哪一种厚度好，则要经过磨片、化学腐蚀、烘干、烧结、参数测定等工序，试验周期长达三天(生产中则更长，要一个多星期)，而且有些工序必须在同一条件下才能得到正确结果.

0.618 法、分数法、对分法和爬山法有一个共同的特点，即后续的试验安排依赖于前面的试验结果. 它们的优点是总的试验次数少，缺点是如果试验结果需要很长时间才能得到，则试验周期累加，耗时太多.

为了加快试验进度，我们很容易想到把所有可能的试验同时安排进行，根据试验结果，找出最佳点. 同时进行多个试验，优点是试验总时间短，缺点是总的试验次数比较多. 如果每个试验的代价不大，又有足够的设备，这样做是可以接受的.

较好的办法是全部试验分几批做，一批同时安排几个试验，同时进行比较，一批一批做下去，直到找出最佳点. 这样可以兼顾试验设备、代价和时间上的要求. 这种方法称为分批试验法.

分批试验法可以分为均分分批试验法和比例分割分批试验法两种.

(1) 均分分批试验法.

我们用均分分批试验法优选单晶片厚度，这种方法是每批试验均匀地安排在试验范围内.

每批安排 2 个试验，先将试验范围(0.20，0.50)均分为 3 份，在其 2 个分点 0.30，0.40 处做 2 个试验(图 1-16).

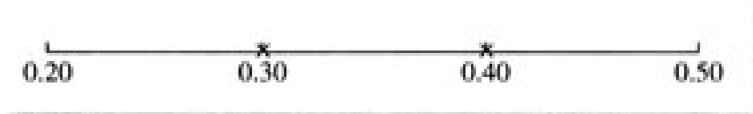


图 1-16

将 2 个试点的试验结果进行比较，设 0.30 点为好点，则存优范围为(0.20，0.40). 然后将存优范围再均分为 4 份，在未做过试验的 2 个点上做第 2 批试验，这 2 个点分别为 0.25，0.35(图 1-17). 设 0.35 点为好点，则存优范围是(0.30，0.40)，去掉包含 0.25 点的 0.20 至 0.30 这部分.

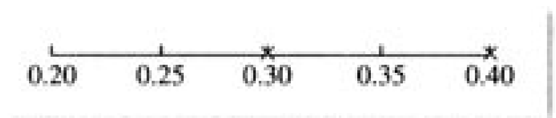


图 1-17

重复第 2 批的做法，直到找出最佳点.

可以看到，第 1 批试验后，存优范围为原来的$\frac{2}{3}$；从第 2 批试验起，每做一批试验，都使存优范围缩短为前次留下的$\frac{1}{2}$.

对于一批做偶数个试验的一般情况，与上面两个情况类似. 假设每批做 $2n$ 个试验. 首先把试验范围均分为 $2n+1$ 份. 在其 $2n$ 个均分点 x_1，x_2，…，x_{2n-1}，x_{2n}上做试验. 比较 $2n$ 个试点上的试验结果，如果 x_i 最好，则去掉小于 x_{i-1}和大于 x_{i+1}部分，存优范围是(x_{i-1}, x_{i+1}). 然后将(x_{i-1}, x_{i+1})均分为 $2n+2$ 份，就是将 $2n$ 个试验均匀地安排在 x_i 的两旁，在未做过试验的 $2n$ 个分点上再做试验. 如此反复，就能找到最佳点. 用这个方法，第一批试验后存优范围为原来的$\frac{2}{2n+1}$，以后每批试验后，存优范围都为前次留下的$\frac{1}{n+1}$.

(2) 比例分割分批试验法.

比例分割分批试验法是将第 1 批试验点按比例地安排在试验范围内. 以每批做 2 个试验为例，将试验范围 7 等分，第 1 批安排在左起第 3，4 两个点上进行(图 1-18)；

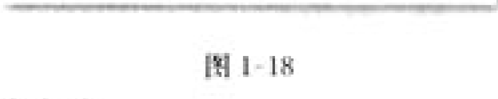


图 1-18

第 2 批将存优范围 4 等分(共有 3 个分点)，设第 4 个分点为好点，则去掉小于第 3 个分点的部分，存优范围为第 3 个分点到右端. 在没有做过的 2 个分点(第 5、6 分点)上进行试验(图 1-19).

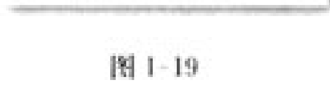


图 1-19

第 1 批试验后存优范围为原来的$\frac{4}{7}$，第 2 批试验后都为前次留下的$\frac{1}{2}$.

每批更多个试验点的情形，原理类似. 每批做 2 个，4 个，6 个和 8 个试验点的安排如表 1-1，图示中的×代表第一批的试点位置，数字代表第一批不安排的试点个数.

表 1-1

每批试验个数	试验范围等分数	第一批试点	图示
2	7	3，4	2××2
4	17	5，6，11，12	4××4××4
6	31	7，8，15，16，23，24	6××6××6××6
8	48	9，10，19，20，29，30，39，40	8××8××8××8××8

从效果上看，比例分割法比均匀法好. 但是比例分割法每批中的试验点挨得太近，如果试验效果差别不显著的话，就不好鉴别. 因此，这种方法比较适用于小的因素变动就能引起结果的显著变化的情形.

究竟一批安排几个试验合适呢？这要根据具体的情况而定. 如果做一次试验很方便，消耗很少，时间很短；或检验很麻烦，时间又长；或代价很大，而且每次检验可以有好多样品同时进行，在这种情况下每批试验可多做几个，即将试验范围分得细一些；否则就少做几个.

4. 多峰的情形

前面介绍的方法都只适用于“单峰”的情况. 现实生产、生活中也经常碰到“多峰”情形(图 1-20)，有时甚至连“单峰”还是“多峰”都不知道，那又该如何下手呢？

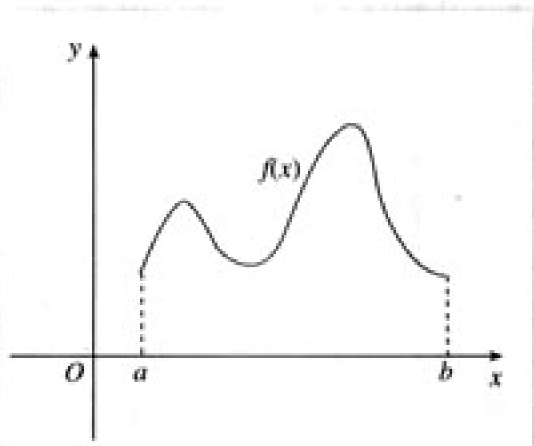


图 1-20

一般可以采用以下两种方法.

(1) 先不管它是“单峰”还是“多峰”，用前面介绍的处理单峰的方法去做，找到一个“峰”后，如果达到预先要求，就先用于生产，以后再找其他更高的“峰”(即分区寻找).

(2) 先做一批分布得比较均匀的试验，看它是否有“多峰”现象. 如果有，则分区寻找，在每个可能出现“高峰”的范围内做试验，把这些“峰”找出来. 第一批分布均匀的试点最好以下述比例划分：$\alpha : \beta = 0.618 : 0.382$(图 1-21). 这样有峰值的范围总是成($\alpha$，$\beta$)或($\beta$，$\alpha$)形式，如图 1-22.

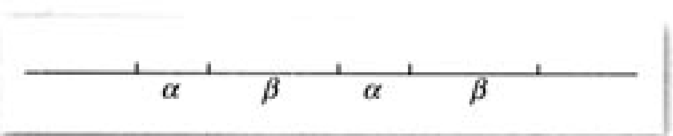


图 1-21

图 1-22

对每个留下的区域应用 0.618 法就可以用上已做过的试验结果，从而减少试验的次数.

习题1.5

1. 使用对分法的条件是什么？对分法与分数法、0.618 法有哪些不同？
2. 用对分法求方程 $x^2+x-1=0$ 的一个正根，精确度为 0.01.
3. 一般的，会计在月底需要对账，如果发现账户不平，即借方余额合计不等于贷方余额合计，就说明账目记录有问题，就需要查账. 当然可以从月初开始一天天往下查，总能找出出错的账目. 如果你是会计，你能用学过的优选方法快速查出错误的记录吗？
4. 某一产品的成分中，需要某种贵重金属来保证其质量. 已知这种金属的含量在 16%时的产品质量是合格的. 为了降低成本，在保证质量的前提下，需要减少这种贵重金属的含量. 你认为可以如何安排优选法试验？
5. 影响爬山法效果的因素有哪些？
6. 你能说出爬山法、0.618 法、分数法和对分法的适用范围和优缺点吗？为什么从效果上看，比例分割法比均匀法效果好？比例分割法能否进一步优化或改进？如何优化或改进？
7. 举出现实生活中能应用对分法和分批试验法优选的例子各一个.
8. 会不会出现没有峰的情况？为什么？

六、多因素方法

现实中，我们也会面临多因素优选问题. 例如在生产某种药品时，它的产量受三个因素的影响——转化温度、投料量和真空度，如何使产量最高就是一个三因素的优选问题；农场种植玉米，如果优选受施肥量和种植密度两个因素影响，如何使产量最高就是一个双因素的优选问题；等等.

解决多因素问题要比单因素问题困难得多. 在遇到多因素问题时，首先应对各个因素进行分析，取出主要因素，略去次要因素，从而把因素由“多”化“少”，以利于问题的解决. 若经过分析，最后还剩下两个或两个以上的因素，就必须使用多因素方法. 解决多因素问题的方法很多，但往往采用降维法来解决. 降维法是把一个多因素的问题转化为一系列较少因素的问题，而较少因素的问题相对地说是比较容易解决的.

对于双因素问题的降维法，我们可以先固定一个因素，对另一个因素进行优选，然后固定第二个因素，再做第一个因素的优选，具体的有纵横对折法、平行线法、从好点出发法等，有时也采用双因素盲人爬山法等其他方法.

1. 纵横对折法和从好点出发法

用 x，y 表示两个因素的取值，$z=f(x, y)$ 表示目标函数(并不需要 $z=f(x, y)$ 的真正表达式)．双因素的优选问题，就是迅速地找到二元目标函数 $z=f(x, y)$ 的最大值(或最小值)及其对应的(x, y)点的问题．假设函数 $z=f(x, y)$ 在某一区域内单峰，其几何意义是把曲面 $z=f(x, y)$ 看作一座山，顶峰只有一个(图 1-23)．双因素的优选问题就是找出曲面 $z=f(x, y)$ 的最高峰．

把试验范围中 $z=f(x, y)$ 取同一值的曲线叫作等高线，就如山上同一高度的点的连线在水平面上的投影(图 1-24)．

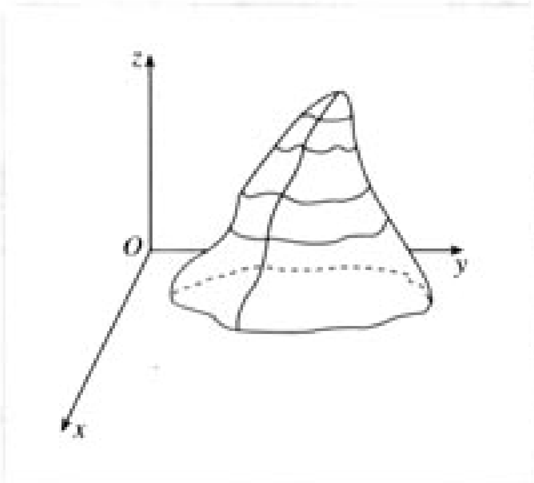


图 1-23

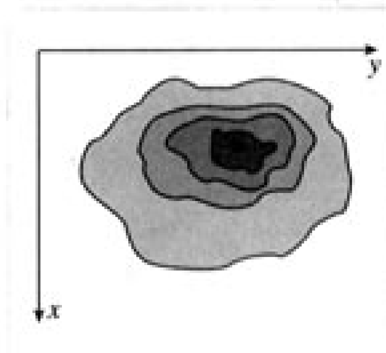


图 1-24

等高线一圈套一圈，越高越在里边．所以双因素问题就是通过试验、比较的方法来寻找比较靠里边的等高线，直到找到最里边的一圈等高线(即最佳点)为止．

以横坐标表示因素 I，纵坐标表示因素 II．假设因素 I 的试验范围为$[a_1, b_1]$，因素 II 的试验范围为$[a_2, b_2]$．

先将因素 I 固定在试验范围的中点 c_1，即$\frac{1}{2}(a_1+b_1)$处，对因素 II 进行单因素优选，得到最佳点 A_1．同样将因素 II 固定在中点 c_2，即$\frac{1}{2}(a_2+b_2)$处，对因素 I 进行单因素优选，得到最佳点 B_1．比较 A_1 和 B_1 的试验结果，如果 B_1 比 A_1 好，则沿坏点 A_1 所在的线，丢弃不包括好点 B_1 所在的半个平面区域，即丢弃平面区域：$a_1\leqslant \text{I}\leqslant c_1$，$a_2\leqslant \text{II}\leqslant b_2$(图 1-25)．

然后再在因素 I 的新范围即$(c_1, b_1]$的中点 d_1，用单因素方法优选因素 II，如果最佳点为 A_2，而且 A_2 比 B_1 好，则沿坏点 B_1 所在的线，丢弃不包括好点 A_2 所在的半个平面区域，即丢弃平面区域：$c_1\leqslant \text{I}\leqslant b_1$，$a_2\leqslant \text{II}\leqslant c_2$(图 1-26)．

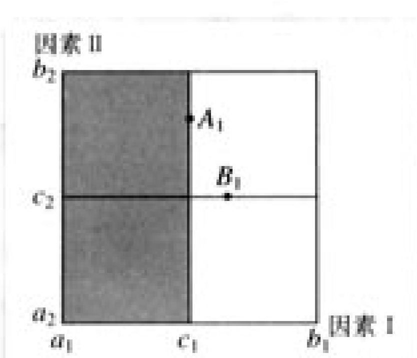


图 1-25

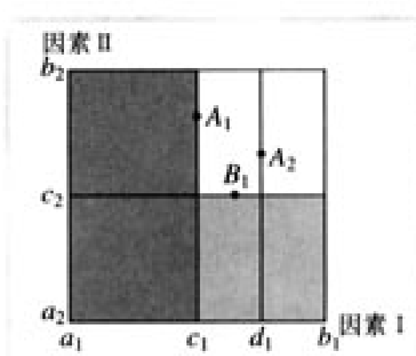


图 1-26

如此继续下去，不断地将试验范围缩小，直到找到满意的结果为止．这个方法称为纵横对折法．

思考

是否每次都要固定在该因素试验的中点？还有没有改进的余地？

不一定．实践证明，用下面的方法更好．

先固定因素Ⅰ于原生产点（或 0.618 点）c_1，用单因素方法优选因素Ⅱ，得到最佳点为 $A_1(c_1, c_2)$，然后把因素Ⅱ固定在 c_2，用单因素法优选因素Ⅰ，得到最佳点 $B_1(d_1, c_2)$，则去掉 A_1 右边的平面区域，试验范围缩小到 $a_1 \leqslant \text{I} < c_1$，$a_2 \leqslant \text{II} \leqslant b_2$．再将因素Ⅰ固定在 d_1，优选因素Ⅱ，得到最佳点 $A_2(d_1, d_2)$，则去掉 B_1 以上部分，试验范围缩小到：$a_1 \leqslant \text{I} < c_1$，$a_2 \leqslant \text{II} < c_2$，再将因素Ⅱ固定在 d_2，用单因素方法在 $[a_1, c_1)$ 范围内优选因素Ⅰ，这样继续下去，就能找到所需要的最佳点(图 1-27)．

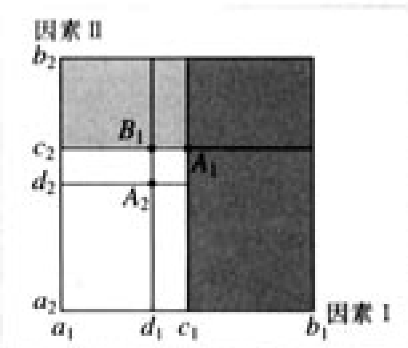


图 1-27

这个方法的要点是：对某一因素进行优选试验时，另一因素固定在上次试验结果的好点上（除第一次外），所以称为**从好点出发法**．

案例 1 阿托品是一种抗胆碱药．为了提高产量、降低成本，利用优选法选择合适的脂化工艺条件．根据分析，主要因素为温度与时间，定出其试验范围为

温度：55 ℃～75 ℃，

时间：30 min～210 min.

用从好点出发法对工艺条件进行优选：

（1）参照生产条件，先固定温度为 55℃，用单因素法优选时间，得最优时间为 150 min，其产率为 41.6%．

（2）固定时间为 150 min，用单因素法优选温度，得最优温度为 67℃，其产率为 51.59%．

（3）固定温度为 67℃，用单因素法再优选时间，得最优时间为 80 min，其产率为 56.9%．

（4）再固定时间为 80 min，又对温度进行优选，结果还是 67℃好．试验到此结束，可以认为最好的工艺条件为温度：67℃，时间：80 min（图1-28）．实际中采用这个工艺进行生产，平均产率提高了 15%．

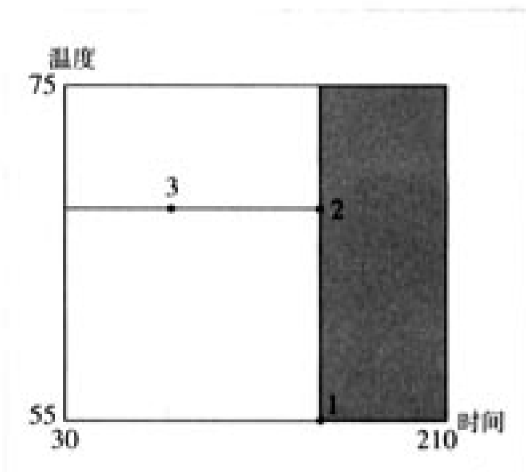


图 1-28

2. 平行线法

前面讲的方法都是先固定因素 I，优选因素 II；再固定因素 II，优选因素 I，来回进行优选试验．实践中，经常会遇到由于设备或其他条件的限制，有一个因素不容易调整，而另一个因素比较容易调整的情况．比如一个是浓度，一个是流速，调整浓度就比调整流速困难．在这种情况下，不便于应用上述方法．

设影响某试验结果的因素有 I、II 两个，而因素 II 难以调整．首先把难以调整的因素 II 固定在 0.618 处，用单因素方法对另一个因素 I 的进行优选，例如最佳点在 A_1 处．然后再把因素 II 固定在 0.618 的对称点 0.382 处，再用单因素方法对因素 I 进行优选，例如最佳点在 A_2 处．比较 A_2 和 A_1 两点上的试验结果，如果 A_1 比 A_2 好，则去掉 A_2 以下的部分（图 1-29中阴影部分），即好点不会在因素 II 的 0～0.382 之间（如果 A_2 比 A_1 好，则去掉 A_1 以上的部分，即好点不会在因素 II 的 0.618～1 之间）．

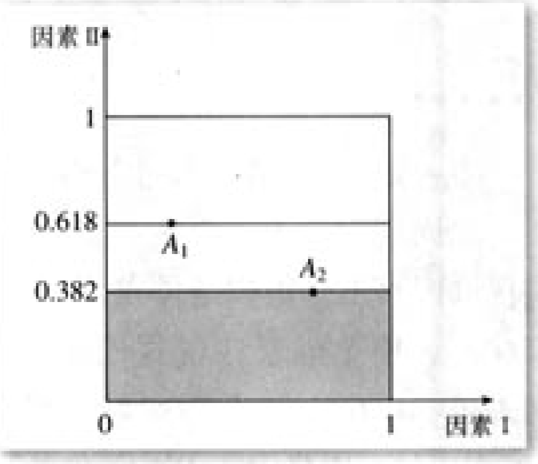


图 1-29

然后按 0.618 法找出因素 II 的第三点 0.764．第三次试验时，将因素 II 固定在 0.764，用单因素优选方法对因素 I 进行优选，例如最佳点在 A_3 处．比较 A_3 和 A_1，如果仍然是 A_1 好，则去掉 0.764 以上部分（图 1-30）．如此继续下去，直到找到满意的结果为止．

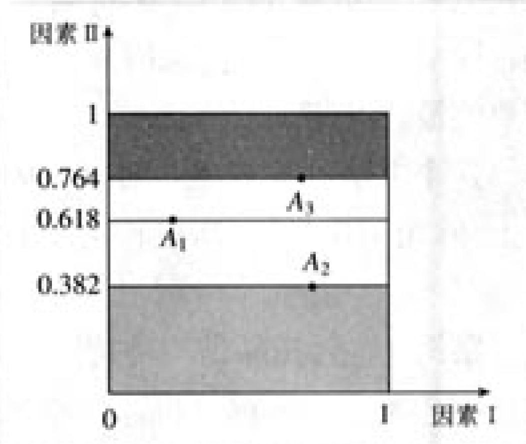


图 1-30

这个方法的特点是，每次试验都是在相互平行的直线上做，因此叫做**平行线法**．

因素 II 上的取点方法是否一定要按 0.618 法？不一定，也可以用其他方法，例如可以固定在原有生产水平上，这样可以少做试验．

在用平行线法处理两因素问题时，不能保证下一条平行线上的最佳点一定优于以前各条平行线上的最佳点，因此，有时为了较快地得到满意的结果，常常采用平行线加速法．

所谓“平行线加速”是在求得两条平行直线 l_1 与 l_2 上的最佳点 A_1 与 A_2 后，比较 A_1 与 A_2 两点上的试验结果，若 A_1 优于 A_2，则去掉下面一块．然后在剩下的范围内过 A_2，A_1 作直线 L_1，在 L_1 上用单因素法找到最佳点，设为 A_3（图 1-31）．

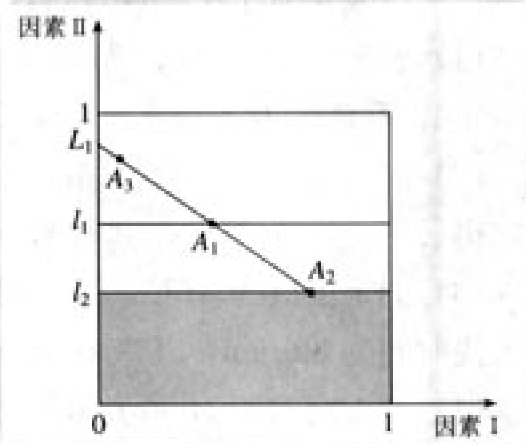


图 1-31

显然 A_3 优于 A_1．如果对 A_3 的试验结果还不满意，则再过 A_3 作 l_1 的平行线 l_3，在 l_3 上用单因素法求得最佳点 A_4．显然 A_4 优于 A_3（若 A_4 与 A_3 重合，则可以认为 A_4 即为最佳点），因此可去掉图 1-32 的下边一块．

若 A_4 的试验结果还不满意，则在剩下的试验范围内过 A_1，A_4 作直线 L_2，在 L_2 上用单因素法进行优选．依次进行，直到结果满意为止．

对于 A_2 优于 A_1 的情况也可以类似地讨论．

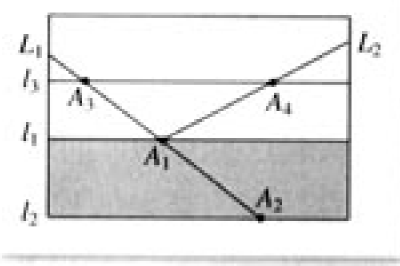


图 1-32

案例 2　“除草醚”配方试验中，所用原料为硝基氯化苯，2.4—二氯苯酚和碱，试验目的是寻找 2.4—二氯苯酚和碱的最佳配比，使其质量稳定、产量高．

碱的变化范围：1.1～1.6(克分子比)；

酚的变化范围：1.1～1.42(克分子比)．

首先固定酚的用量 1.30(即 0.618 处)，对碱的用量进行优选，得最优用量为 1.30，即图 1-33 上的点 A_1．

再固定酚的用量 1.22(即 0.382 处)，对碱的用量进行优选，得碱的最优用量为 1.22，即图 1-33 上的点 A_2．过 A_1，A_2 作直线 L(直线 L 上的点是酚∶碱＝1∶1)，在直线 L 上用单因素法进行优选(因为 A_2 优于 A_1，所以酚的用量低于 1.22 时就不必做了)，最佳点为 A_3，即酚与碱的用量均为 1.27．

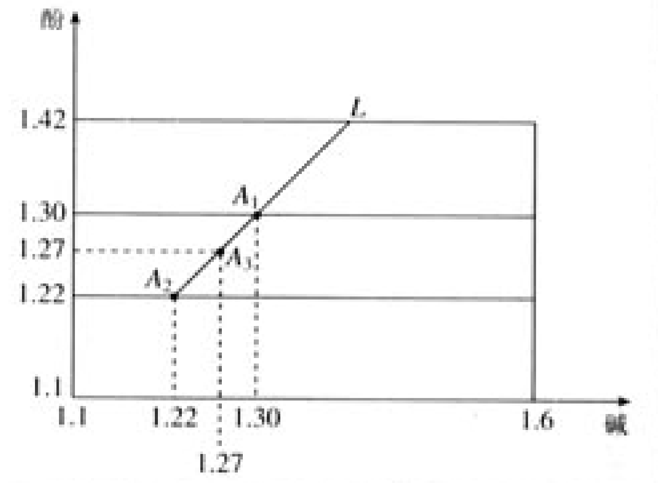


图 1-33

3. 双因素盲人爬山法

在单因素试验方法中已经提到，试验在大生产中进行，某些因素不允许大幅度调整时，只能用盲人爬山法．如果是双因素问题，那么在用盲人爬山法找到第一个因素最佳点以后，就应该以这一点为起点，再对第二个因素应用同样的方法找最佳点．如果到达某点后，不管改变哪个因素的量，其结果都比这点差，则这一点就是最佳点．

是否一定要先找出第一个因素的最佳点，然后再找另一个因素的最佳点呢？不一定．在双因素寻找最佳点的过程，就像盲人爬山可以朝前后左右四个方向前进一样．盲人在山上某点，想要爬到山顶，怎么办？从立足处用明杖向前一试，觉得高些，就往前一步；如果前面不高，向左一试，高就向左一步；不高再试后面，高就退后一步；不高再试右面，高就向右走一步；四面都不高，就原地不动．总之，某个方向高了就朝这个方向走一步，否则试其他方向，这样一步一步地走，就一定能走上山顶．在寻找最佳点时也可以以起点为中心，向四周探索一下，找出有利于寻找目标的方向，在这个方向上跨一步，然后再探索．这样边探索边前进，直到找到最佳点为止．这就是双因素问题的**盲人爬山法**．

案例 3　对某种物品镀银时，要选择氯化银和氰化钠的用量，使得镀银速度快，质量好．

为此采用爬山法选择最佳点. 起点：氰化钠 85 g/ml，氯化银 55 g/ml，步长：氰化钠 10 g/ml，氯化银 5 g/ml. 试验过程如图 1-34 所示.

从起点 1 开始，向右试探，结果 2 比 1 好，继续向右试探，结果 3 比 2 好，再向右试探，结果 4 不如 3 好，回到 3 再向上试探，5 比 3 好，继续向上试探，6 比 5 好，再继续试探，直到其他三个方向不如 6 号，并且 6 的结果满足生产条件，即可以停止试验.

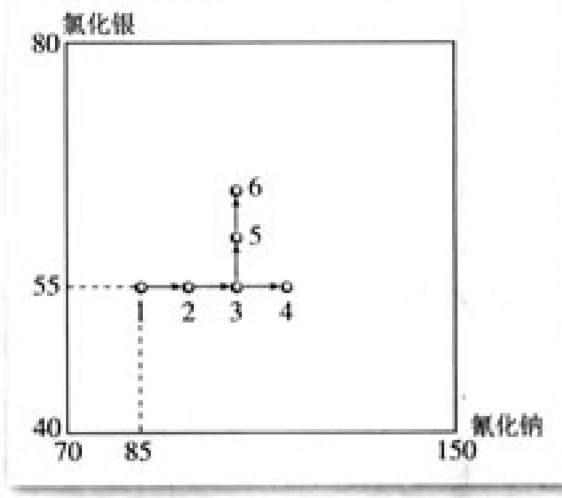


图 1-34

思考

在第一节提到的测池塘最深点问题，如果假定池塘的深度是双因素单峰的(这里的峰指的是最深点)，你能选择合适的优选法迅速测出最深点吗？

习题1.6

1. 白油膏是生产擦字橡皮的主要原料，对产品质量起着决定性作用. 它是蓖麻油、胚芽油、7# 机油、重体 $CaCO_3$、S_2Cl_2 和 H_2O 在一定温度下反应而成的. 根据经验和分析，可以确定油类、重体 $CaCO_3$ 的配比，现在需要对 S_2Cl_2 和 H_2O 的用量进行优选. 请你选择合适的优选法安排试验，并说明理由.
2. 你能举出现实中双因素的优选问题吗？并选择合适的优选法解决.